**Лабораторная работа №3**

**Тема**: Формулы полной вероятности и Байеса.

Задания:

3.1 Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

1) Первая вытащенная кость является дублем. Дублей среди костей домино 7 штук — Пусто-Пусто, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6. Найдем вероятность этой гипотезы. P(B1) = 7 / 28 = 1/4. Вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой: P B1(A) = 6 / 27 = 2/9 2) Первая вытащенная кость не является дублем: P(B2)= 21 / 28 = 3/4. Вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой: PB2(A) = 12/27 = 4/9. По формуле полной вероятности: P(A) = P(B1) \* P B1(A) + P(B2) \* P B2(A) = 1/4 \* 2/9 + 3/4 \* 4/9 = 1 / 18 + 3 / 9 = 7/18.

3.2 Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5 и 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

Если обозначить событие H1 - то, что лампа из первой партии, аналогично H2 и H3, а событие A - то, что лампа проработала заданное число часов, то данные задачи записывыаются так: P(H1)=0.25, P(A|H1)=0.1 P(H2)=0.5, P(A|H2)=0.2 P(H3)=0.25, P(A|H1)=0.4 Найти нужно P(A). Согласно формуле полной вероятности P(A)=P(H1)\*P(A|H1)+P(H2)\*P(A|H2)+P(H3)\*P(A|H3)=0.25\*0.1+0.5\*0.2+0.25\*0.4=0.225

3.3 Противник применяет самолеты 5 типов. Известно, что на данном участке фронта сосредоточено примерно равное число самолетов каждого типа. Вероятности сбить самолет соответственно равны для них 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 и 0,1. Самолет противника сбит. Чему равна вероятность того, что это самолет I-го типа?

Пусть событие 𝐴𝑖​ - это событие, что самолет принадлежит к 𝑖-му типу (где 𝑖 принимает значения от 1 до 5).Пусть 𝐵 - событие, что самолет был сбит. Мы хотим найти вероятность того, что самолет принадлежит к 𝑖-му типу, при условии, что он был сбит, то есть 𝑃(𝐴𝑖∣𝐵).

По формуле Байеса:

𝑃(𝐴𝑖∣𝐵)=𝑃(𝐵∣𝐴𝑖)⋅𝑃(𝐴𝑖).𝑃(𝐵)

где 𝑃(𝐵∣𝐴𝑖) - вероятность того, что самолет сбит, если он принадлежит к 𝑖-му типу, 𝑃(𝐴𝑖) - априорная вероятность того, что самолет принадлежит к 𝑖i-му типу, а 𝑃(𝐵) - общая вероятность того, что самолет сбит.

Для вычисления 𝑃(𝐵) мы можем воспользоваться формулой полной вероятности:

𝑃(𝐵)=∑𝑖=15𝑃(𝐵∣𝐴𝑖)⋅𝑃(𝐴𝑖)

Известно, что вероятности сбить самолеты каждого типа равны: 0.6; 0.3; 0.2; 0.1; 0.1, а также сосредоточено примерно равное число самолетов каждого типа, поэтому 𝑃(𝐴𝑖)=15P(Ai​)=51​ для всех 𝑖.

Теперь мы можем подставить все значения и решить:

𝑃(𝐵)=0.6⋅1/5+0.3⋅1/5+0.2⋅1/5+0.1⋅1/5+0.1⋅1/5

𝑃(𝐵)=0.6+0.3+0.2+0.1+0.1/5=1.3/5=0.26

Теперь мы можем использовать формулу Байеса для определения вероятности того, что самолет принадлежит к 𝑖i-му типу:

𝑃(𝐴𝑖∣𝐵)=𝑃(𝐵∣𝐴𝑖)⋅𝑃(𝐴𝑖)/𝑃(𝐵)

𝑃(𝐴𝑖∣𝐵)=𝑃(𝐵∣𝐴𝑖)⋅(1/5)/0.26

Подставим значения для 𝑃(𝐵∣𝐴𝑖): 𝑃(𝐴1∣𝐵)=(0.6⋅1/5)/0.26=0.12/0.26≈0.4615

Таким образом, вероятность того, что самолет принадлежит к первому типу, если он был сбит, примерно равна 0.4615.

3.7 На сборку поступают детали из трех автоматов. Первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2%, третий – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со 2-го – 2000, а с 3-го – 2500.

Используя формулу полной вероятности, получим: 𝑃(𝐵)=∑𝑖=1,3𝑃(𝐵∣𝐴𝑖)⋅𝑃(𝐴𝑖)

Из условия задачи известны вероятности брака для каждого автомата: 0.3%, 0.2%, и 0.4%, а также количество деталей, поступивших на сборку с каждого автомата: 1000, 2000 и 2500 соответственно.

Теперь мы можем вычислить общую вероятность брака 𝑃(𝐵):

𝑃(𝐵)=𝑃(𝐵∣𝐴1)⋅𝑃(𝐴1)+𝑃(𝐵∣𝐴2)⋅𝑃(𝐴2)+𝑃(𝐵∣𝐴3)⋅𝑃(𝐴3)

Подставим известные значения:

𝑃(𝐵)=0.003⋅1000/(1000+2000+2500)+0.002⋅2000/(1000+2000+2500)+0.004⋅2500/(1000+2000+2500) 𝑃(𝐵)=0.003⋅1000/5500+0.002⋅2000/5500+0.004⋅2500/5500

𝑃(𝐵)=3/5500+4/5500+10/5500

𝑃(𝐵)=17/5500

𝑃(𝐵)≈0.0031

3.9 В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: выстрел произведен из винтовки с прицелом или без него?

Н1 -- взята винтовка с оптическим прицелом. Вероятность гипотезы Р (Н1) = 4/10 = 0.4. Н2 -- взята винтовка без оптического прицела. Вероятность гипотезы Р (Н2) = 6/10 = 0.6. Событие А -- попадание в цель. Условные вероятности попадания для каждой из гипотез: Р (А | H1) = 0.95, Р (А | H2) = 0.8. Полная вероятность попадания: Р (А) = Р (А | H1) \* Р (Н1) + Р (А | H2) \* Р (Н2) = 0.4\*0.95 + 0.6\*0.8 = 0.86. Апостериорная вероятность первой гипотезы при условии, что пуля попала в мишень: P(H1 | A) = P(A | H1) \* P(H1) / P(A) = 0.4\*0.95/0.86. Апостериорная вероятность второй гипотезы при условии, что пуля попала в мишень: P(H2 | A) = P(A | H2) \* P(H2) / P(A) = 0.6\*0.8/0.86. Отсюда P(H2 | A) > P(H1 | A), то есть более вероятно, что стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела.

3.12 В тире имеются 5 ружей, вероятности попадания которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

Hk - взято k-е ружье, Р (Нk)=1/5 Каждой гипотезе соответствует своя вероятность попадания, видная из условия задачи, например: P(A/H1)=0.5, Р (Н2)=0.6.... и так далее Теперь по формуле полной вероятности: Р (А) =Σ(Р (Нk)\*P(A/Hk))= (т. к все Р (Нk)=1/5) =1/5\*ΣP(A/Hk)=(0.5+0.6+0.7+0.8+0.9)/5=0.7